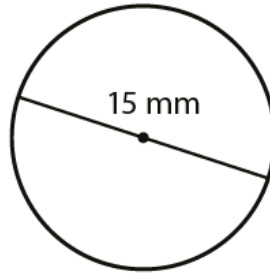


8.1

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= \pi d && \text{Sijoitetaan } d = 15. \\ &= \pi \cdot 15 \\ &\approx 47 \text{ (mm)} \end{aligned}$$



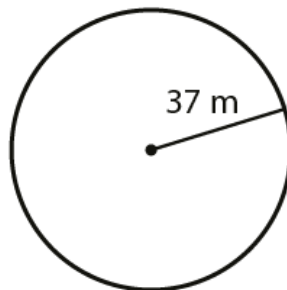
$$\text{Ympyrän säde } r = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ (mm)}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 && \text{Sijoitetaan } r = 7,5. \\ &= \pi \cdot 7,5^2 \\ &\approx 180 \text{ (mm}^2\text{)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r && \text{Sijoitetaan } r = 37. \\ &= 2\pi \cdot 37 \\ &\approx 230 \text{ (m)} \end{aligned}$$



Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 && \text{Sijoitetaan } r = 37. \\ &= \pi \cdot 37^2 \\ &\approx 4300 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) kehän pituus 47 mm, pinta-ala 180 mm²

b) kehän pituus 230 m, pinta-ala 4300 m²

8.2

a) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r && \text{Sijoitetaan } r = 3,5. \\ &= 2\pi \cdot 3,5 \\ &\approx 22 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 && \text{Sijoitetaan } r = 3,5. \\ &= \pi \cdot 3,5^2 \\ &\approx 38 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

b) Ympyrän säde on $r = \frac{12,6}{2} = 6,3 \text{ (cm)}$.

Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r && \text{Sijoitetaan } r = 6,3. \\ &= 2\pi \cdot 6,3 \\ &\approx 39,6 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 && \text{Sijoitetaan } r = 6,3. \\ &= \pi \cdot 6,3^2 \\ &\approx 125 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) kehän pituus 22 cm, pinta-ala 38 cm²

b) kehän pituus 39,6 m, pinta-ala 125 m²

8.3

- a) Ympyrän pinta-ala on 65 m^2 . Ratkaistaan ympyrän säde r .

$$A = \pi r^2 \quad \text{Sijoitetaan } A = 65.$$

$$65 = \pi r^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r \approx 4,548 \text{ tai } r \approx -4,548$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r \approx 4,5 \text{ m}$. Tanssilattian säde on $4,5$ metriä.

- b) Lasketaan ympärysmitta.

$$p = 2\pi r \quad \text{Sijoitetaan } r \approx 4,548.$$

$$\approx 2\pi \cdot 4,548$$

$$\approx 29 \text{ (m}^2\text{)}$$

Tanssilattian pinta-ala on 29 m^2 .

Vastaus

a) $4,5 \text{ m}$

b) 29 m^2

8.4

a) Ratkaistaan ympyrän halkaisija.

$$p = \pi d \quad \text{Sijoitetaan } p = 15.$$

$$15 = \pi d \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d \approx 4,774 \approx 4,8 \text{ (cm)}$$

Ympyrän halkaisija on 4,8 cm.

b) Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\text{Ympyrän säde } r \approx \frac{4,774}{2} \approx 2,387 \text{ (cm)}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\approx \pi \cdot 2,385^2 \quad \text{Sijoitetaan } r \approx 2,387.$$

$$\approx 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ympyrän pinta-ala on 18 cm².

Vastaus

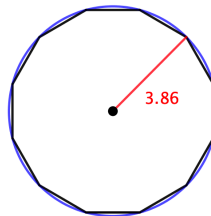
a) 4,8 cm

b) 18 cm²

8.5

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 2. Piirretään janan päätepisteiden avulla säännöllinen monikulmio, jossa on 12 kärkipistettä.

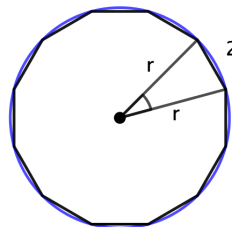
Piirretään ympyrä valitsemalla kolme kehän pistettä. Kaikki 12-kulmion kärjet ovat ympyrän kehän pisteitä.



Määritetään ympyrän keskipiste ja mitataan ympyrän säde. Ympyrän säde on 3,86.

- b) Ympyrällä ja 12-kulmiolla on yhteinen keskipiste.

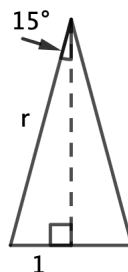
Keskipisteestä 12-kulmion vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat 12-kulmion sivun kanssa tasakylkisen kolmion.



Vastaavia kolmioita muodostuu kaksitoista, joten kolmion huippukulman suuruus on

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.



Ratkaistaan ympyrän säde r suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{r}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

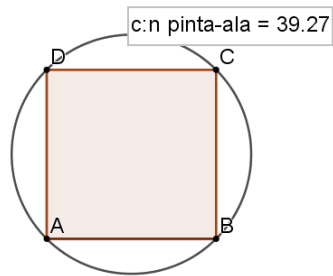
$$r \approx 3,86$$

Vastaus

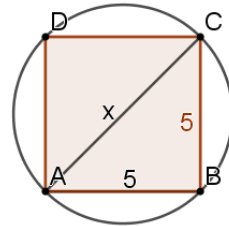
- a) 3,86 b) 3,86

8.6

- a) Piirretään jana, jonka pituus on 5. Piirretään säännöllinen monikulmio, jossa on neljä kärkeä. Piirretään ympyrä valitsemalla kolme kehän pistettä. Mitataan ympyrän pinta-ala. Pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella on 39,3.



- b) Neliöllä ja ympyrällä on yhteinen keskipiste. Jana AC on sekä ympyrän halkaisija että neliön lävistäjä. Kolmio ABC on suorakulmainen. Ratkaistaan janan AC pituus Pythagoraan lauseella.



$$5^2 + 5^2 = x^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx -7,071 \text{ tai } x \approx 7,071$$

Pituus on positiivinen luku, joten ympyrän halkaisija $x \approx 7,071$.

Ympyrän säde $\frac{7,071}{2} = 3,5355 \approx 3,5$.

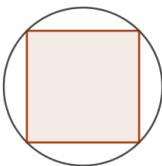
Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2$$

$$= \pi \cdot 3,5355^2$$

$$\approx 39,3$$

Vastaus

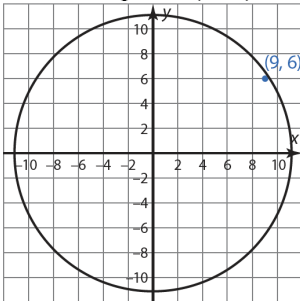


- a) pinta-ala 39,3

- b) säde 3,5; pinta-ala 39,3

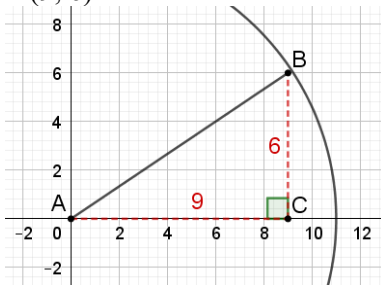
8.7

- a) Piirretään ympyrä, jonka keskipiste $(0, 0)$ ja säde 11.
Piirretään piste $(9, 6)$.



Piste $(9, 6)$ näyttää olevan ympyrän sisäpuolella.

- b) Piirretään suorakulmainen kolmio pisteiden $A = (0, 0)$, $C = (9, 0)$ ja $B = (9, 6)$ kautta.



Ratkaistaan hypotenuusan AB pituus Pythagoraan lauseella.

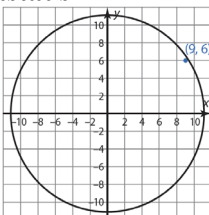
$$AB^2 = 9^2 + 6^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AB \approx -10,8 \text{ tai } AB \approx 10,8$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AB \approx 10,8$.

Hypotenuusan AB pituus on pienempi kuin ympyrän säde, joten piste B on ympyrän sisäpuolella.

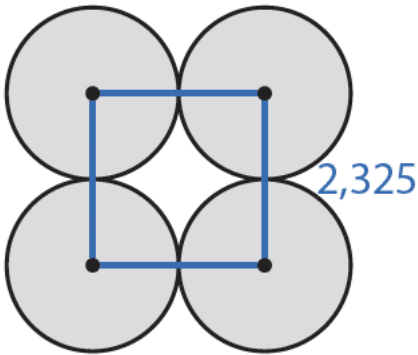
Vastaus



- a) ympyrän sisällä
b) 10,8; piste sijaitsee ympyrän sisällä, koska etäisyys on pienempi kuin ympyrän säde.

8.8

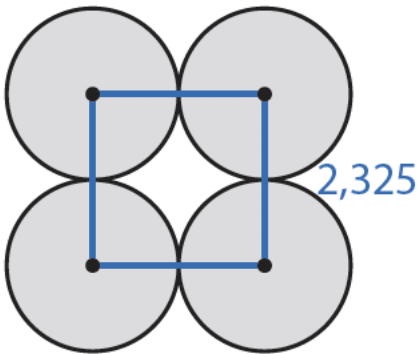
a) Piirretään kuva.



b) Neliön $ABCD$ sisään jää jokaisesta kolikosta neljäsosa. Lasketaan neliön sisälle jäävän tyhjän tilan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{tyhjä}} &= A_{\text{neliö}} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{\text{kolikko}} \\ &= 2,325^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2,325}{2} \right)^2 \\ &\approx 1,160 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

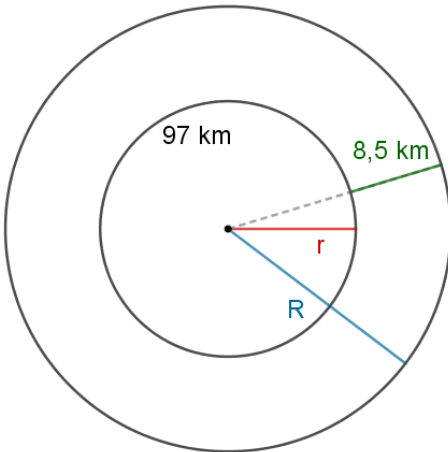


a)

b) $1,160 \text{ cm}^2$

8.9

Piirretään kuva.



Ratkaistaan sisemmän kehätien säde r .

$$p = 2\pi r$$

$$97 = 2\pi r \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r \approx 15,438 \text{ (km)}$$

Lasketaan ulomman kehätien säde R .

$$R \approx 8,5 + 15,438$$

$$= 23,938 \text{ (km)}$$

Lasketaan ulomman kehätien pituus.

$$p = 2\pi R$$

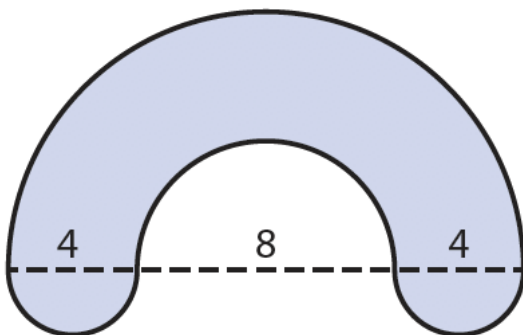
$$= 2\pi \cdot 23,938$$

$$\approx 150 \text{ (km)}$$

Vastaus

150 km

8.10



Alue koostuu puolilympyröistä, joiden säteet ovat 2, 2, 4 ja 8.

Lasketaan väritetyn alueen piiri.

$$p = 2\pi \cdot 2 + \pi \cdot 4 + \pi \cdot 8 = 16\pi$$

Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 28\pi$$

Vastaus

piiri 16π , pinta-ala 28π

8.11

- a) Lasketaan ympyrän säteen pituus.

$$r = \frac{7,2}{2} = 3,6 \text{ (m)}$$

Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ &= 2\pi \cdot 3,6 \\ &\approx 23 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot 3,6^2 \\ &\approx 41 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

- b) Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ &= 2\pi \cdot 3,19 \\ &\approx 20,0 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi \cdot 3,19^2 \\ &\approx 32,0 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

- a) kehän pituus 23 m, pinta-ala 41 m²
b) kehän pituus 20,0, pinta-ala 32,0 m²

8.12

- a) Altaan pohjan pinta-ala on $1,2 \text{ m}^2$. Ratkaistaan altaan pohjan säde r .

$$A = \pi r^2$$

Sijoitetaan $A = 1,2$.

$$1,2 = \pi r^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = -0,618 \text{ tai } r = 0,618$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r \approx 0,618 \text{ m}$.

Lasketaan altaan halkaisija.

$$d = 2r = 2 \cdot 0,618 \text{ m} \approx 1,2 \text{ m}$$

- b) Lasketaan altaan ympärysmitta.

$$p = 2\pi r$$

Sijoitetaan $r = 0,618$.

$$= 2\pi \cdot 0,618$$

$$\approx 3,9 \text{ (m)}$$

Vastaus

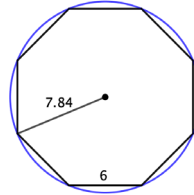
a) $1,2 \text{ m}$

b) $3,9 \text{ m}$

8.13

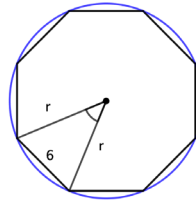
- a) Piirretään jana, jonka pituus on 6. Piirretään janan päätepisteiden avulla säännöllinen monikulmio, jossa on 8 kärkipistettä.

Piirretään ympyrä valitsemalla kolme kehän pistettä. Kaikki 8-kulmion kärjet ovat ympyrän kehän pisteitä. Määritetään ympyrän keskipiste ja mitataan ympyrän säde. Ympyrän säde on 7,84.



- b) Ympyrällä ja 8-kulmiolla on yhteinen keskipiste.

Keskipisteestä 8-kulmion vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat 8-kulmion sivun kanssa tasakylkisen kolmion.

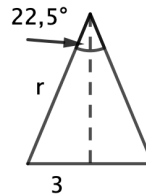


Vastaavia kolmioita muodostuu kahdeksan, joten kolmion huippukulman suuruus on

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$

Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan ympyrän säde r suorakulmaisesta kolmiosta.

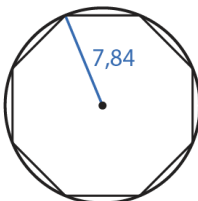


$$\sin 22,5^\circ = \frac{3}{r}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 3\sqrt{2(\sqrt{2} + 2)}$$

Vastaus

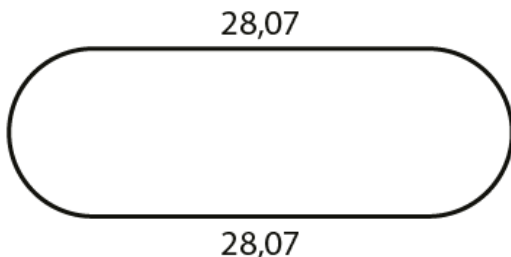


a)

b) 7,84

8.14

- a) Piirretään kaksi yhdensuuntaista ja yhtä pitkää janaa ja näitä yhdistävät puoliympyrät.



- b) Päätyjen puoliympyrät muodostavat yhdessä ympyrän, jonka kehän pituus on $111,12 - 2 \cdot 28,07 = 54,98$ (m).

Lasketaan ympyrän säteen pituus.

$$p = 2\pi r$$

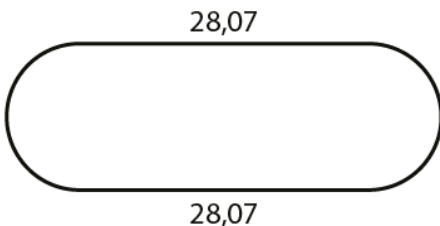
$$54,98 = 2\pi r \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r \approx 8,75 \text{ (m)}$$

Kaarteiden säde on 8,75 metriä.

Vastaus

a)



- b) 8,75 m

8.15

Muutetaan renkaan ulkohalkaisija senttimetreiksi.

$$d = 26'' = 26 \cdot 2,54 \text{ cm} = 66,04 \text{ cm}$$

Lasketaan renkaan ympärysmitta p .

$$\begin{aligned} p &= \pi d && \text{Sijoitetaan } d = 66,04. \\ &= \pi \cdot 66,04 \\ &\approx 207,471 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta kertaa rengas pyörähtää mökkitiellä.

$$\begin{array}{r} 20\,000 \\ \hline 207,4707... \end{array} \quad 200 \text{ m} = 20\,000 \text{ cm}$$
$$\approx 96$$

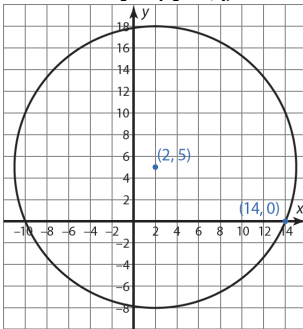
Tarvitaan 96 pyörähdystä.

Vastaus

96 pyörähdystä

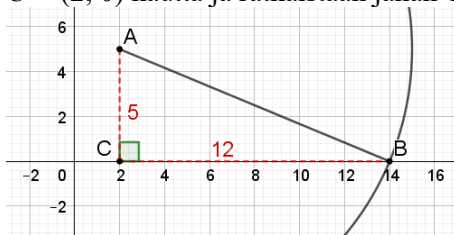
8.16

- a) Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on $(2, 5)$ ja säde 13.



Kuvan perusteella piste $(14, 0)$ näyttäisi olevan ympyrällä.

- b) Piirretään suorakulmainen kolmio pisteiden $A = (2, 5)$, $B = (14, 0)$ ja $C = (2, 0)$ kautta ja ratkaistaan janan AB pituus Pythagoraan lauseella.

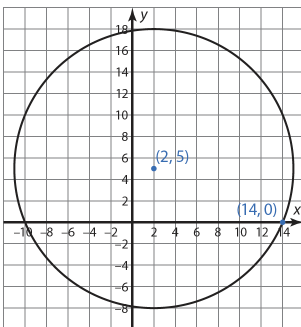


$$AB^2 = 5^2 + 12^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AB = -13 \text{ tai } AB = 13$$

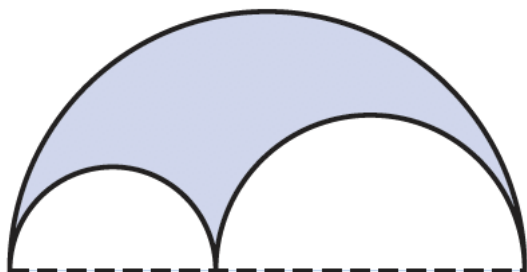
Pituus on positiivinen luku, joten $AB = 13$. Piste on ympyrällä.

Vastaus



- a) ympyrällä
- b) Piste $(14, 0)$ on ympyrällä, koska sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on yhtä suuri kuin ympyrän säde.

8.17



Pienempien puoliympyröiden säteet ovat 2 ja 3.

Ison puoliympyrän säde on $2 + 3 = 5$.

Varjostetun kuvion piiri p saadaan, kun lasketaan yhteen puoliympyröiden piirit.

Varjostetun kuvion piiri $p = \pi \cdot 2 + \pi \cdot 3 + \pi \cdot 5 = 10\pi$.

Varjostetun kuvion pinta-ala A saadaan, kun vähennetään ison puoliympyrän pinta-alasta pienempien puoliympyröiden pinta-alat.

Varjostetun kuvion pinta-ala on $A = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 6\pi$.

Vastaus

piiri 10π , pinta-ala 6π

8.18



Rautalangan pituus muodostuu kolmesta halkaisijasta ja ympyrän kehästä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan halkaisija d .

$$3d + \pi d = 98 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

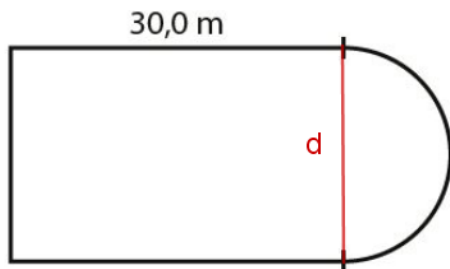
$$d \approx 16 \text{ (cm)}$$

Vastaus

16 cm

8.19

Merkitään salin leveyttä kirjaimella d .



Muodostetaan lattian pinta-alasta yhtälö ja ratkaistaan leveys.

$$800 = 30,0 \cdot d + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d \approx -97,3 \quad \text{tai} \quad d \approx 20,9$$

Pituus on positiivinen luku, joten salin leveys $d \approx 20,9$ m.

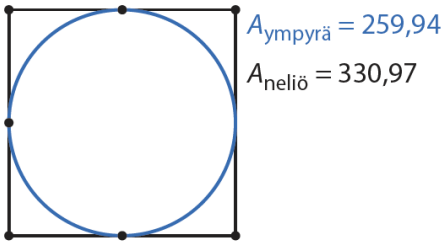
Vastaus

20,9 m

8.20

- a) Piirretään säännöllinen monikulmio, jossa on neljä kulmaa. Merkitään monikulmion sivujen keskipisteet. Piirretään ympyrä kolmen pisteen kautta.

Mitataan neliön ja ympyrän pinta-ala. Ympyrän pinta-ala on 259,94 ja neliön on 330,97.



Lasketaan, kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on neliön pinta-alasta.

$$\frac{259,94}{330,97} \approx 0,79 = 79 \%$$

Ympyrän pinta-ala on 79 % neliön pinta-alasta.

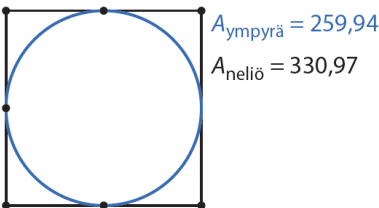
Neliön koko ei näyttäisi vaikuttavan tulokseen.

- b) Neliön sivun pituus on a , joten ympyrän säde on $\frac{a}{2}$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on neliön pinta-alasta.

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$$

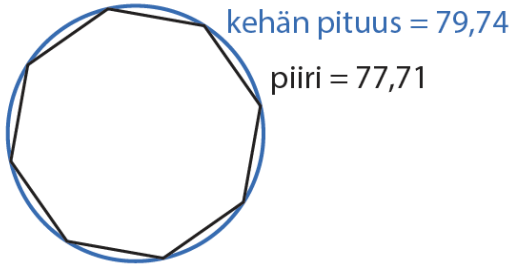
Vastaus



- a) Ympyrän pinta-ala vaikuttaa olevan 79 % neliön pinta-alasta.
b) 79 %

8.21

- a) Piirretään säännöllinen kahdeksankulmio ja ympyrä kolmen kärkipisteen kautta. Mitataan kahdeksankulmion piirin pituus ja ympyrän piiri.



Lasketaan, kuinka monta prosenttia kahdeksan kulmion piiri on ympyrän kehän pituudesta.

$$\frac{77,71}{79,74} \approx 0,97 = 97\%$$

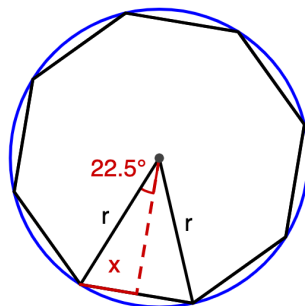
Kahdeksankulmion piiri vaikuttaa olevan 97 % ympyrän kehän pituudesta.

- b) Ympyrällä ja kahdeksankulmiolla on yhteinen keskipiste.

Keskipisteestä kahdeksankulmion vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat kahdeksankulmion sivun kanssa tasakylkisen kolmion.

Vastaavia kolmioita muodostuu kahdeksan, joten kolmion huippukulman suuruus on

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$



Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana

puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan kahdeksankulmion sivun puolikkaan pituus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 22,5^\circ = \frac{x}{r}$$

Sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = r \cdot \sin 22,5^\circ$$

Kahdeksankulmion sivun pituus on $2r \cdot \sin 22,5^\circ$. Kahdeksankulmion piiri on $8 \cdot 2r \cdot \sin 22,5^\circ = 16r \cdot \sin 22,5^\circ$.

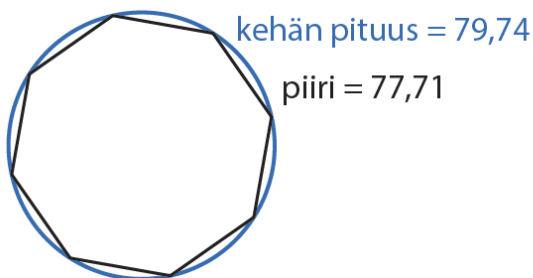
Ympyrän kehän pituus on $2\pi r$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kahdeksan kulmion piiri on ympyrän kehän pituudesta.

$$\frac{16r \sin 22,5^\circ}{2\pi r} \approx 0,97 = 97\%$$

Vastaus

a)



Kahdeksankulmion piiri vaikuttaa olevan 97 % ympyrän kehän pituudesta.

b) 97 %